FD-2758

B.Sc./B.Sc. B.Ed. (Part-III)
Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper - I

Analysis

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) माना कि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा d^* निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \forall\ x, y \in X$$

Let (X, d) be a metric space and let d^* be defined by :

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \forall\ x, y \in X$$

(*b*) दिखाइए कि किसी दूरीक समष्टि में विवृत समुच्चयों के संघ का स्वेच्छ संग्रह विवृत्त समुच्चय होता है।

Show that in a metric space, the union of an arbitrary collection of open sets is open.

(*c*) सिद्ध कीजिए कि ऐसी कोई परिमेय संख्या नहीं है जिसका वर्ग 8 है।

Prove that there exists no rational number whose square in 8.

इकाई / Unit-II

2. (*a*) सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में सघन होता है।

Prove that set of rational numbers is dense in the set of real numbers.

(*b*) क्या $f:[0, 1] \to R,\ f(x) = x^2$ एकसमान सतत फलन है ?

Is $f:[0, 1] \to R,\ f(x) = x^2$ uniformly continuous function ?

(*c*) दर्शाइए कि प्रत्येक समदूरीकता एक समरूपता है।

Show that, every Isometry is a Homomorphism.

इकाई / Unit-III

3. (*a*) दर्शाइए कि $u = \frac{1}{2}\log\left(x^2 + y^2\right)$ हार्मोनिक है तथा इसका हार्मोनिक संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

Show that $u = \frac{1}{2}\log\left(x^2 + y^2\right)$ is harmonic and find its harmonic conjugate.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक द्विरैखिक रूपान्तरण वृत्त या सरल रेखा को वृत्त या सरल रेखा पर ही प्रतिचित्रित करता है।

Prove that every bilinear transformation transforms circle or straight line into circle or straight line.

(*c*) दर्शाइए कि फलन $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$ लाप्लास समीकरण को सन्तुष्ट करता है। संगत विश्लेषित फलन $f(z) = u + iv$ को ज्ञात कीजिए।

Prove that the function $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$ satisfies Laplace equation. Find the corresponding analytical function $f(z) = u + iv$.

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) असमिका $F_{xy}(0, 0) \neq F_{yx}(0, 0)$ को श्वार्ज एवं यंग प्रमेय के परिदृश्य में निम्नलिखित फलन के लिए समझाइए :

$$F(x,y) = \begin{cases} xy\left(x^2 - y^2\right) \big/ x^2 + y^2 & ; \text{ यदि } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \text{ यदि } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

In view of the Schwarz's and Young's theorem explain the inequality $F_{xy}(0, 0) \neq F_{yx}(0, 0)$ for the following function :

$$F(x,y) = \begin{cases} xy\left(x^2 - y^2\right) \big/ x^2 + y^2 & ; \; if\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \; if\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(*b*) यदि $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ तथा $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ क्रमशः A तथा B पर अभिसारित हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = A + B$$ तथा

$$\sum_{n=1}^{\infty} r.a_n = r.A(r \in R)$$ ।

If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges to A and B respectively, then prove that :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = A + B$$ and

$$\sum_{n=1}^{\infty} r.a_n = r.A(r \in R)$$

(*c*) फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए जबकि फलन परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} -1 \ , & -3 < x < 0 \\ 0 \ , & x = 0 \\ 1 \ , & 0 < x < 3 \end{cases}$$

Find the Fourier series for the function $f(x)$ defined by :

$$f(x) = \begin{cases} -1 \ , & -3 < x < 0 \\ 0 \ , & x = 0 \\ 1 \ , & 0 < x < 3 \end{cases}$$

इकाई / Unit-V

5. (*a*) $\int_0^2 \frac{\log x}{\sqrt{2-x}}\, dx$ के अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of $\int_0^2 \frac{\log x}{\sqrt{2-x}}\, dx$.

(*b*) अन्तराल [0, a] में परिभाषित फलन $f(x) = x^2$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $f \in R\,[0, a]$ तथा

$\int_0^a f(x)\, dx = \frac{1}{3} a^3$ ।

For the function $f(x) = x^2$, defined in the interval [0, a], prove that $f \in R\,[0, a]$ and

$\int_0^a f(x)\, dx = \frac{1}{3} a^3$.

(c) व्यापक प्रथम मध्यमान प्रमेय को लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove generalised first mean value theorem.