Roll No. ....

ED–2758

B. A./B. Sc./B. Sc. B. Ed. (Part II)

EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

Paper First

(Analysis)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) दर्शाइये कि निम्नलिखित श्रेणी अभिसारी है :

$$2-\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{4}{3\sqrt{3}}-\frac{5}{4\sqrt{4}}+.........$$

Show that the following series is convergent :

$$2-\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{4}{3\sqrt{3}}-\frac{5}{4\sqrt{4}}+.........$$

(ब) दर्शाइये कि निम्नलिखित फलन मूल बिन्दु पर संतत है, किन्तु अवकलनीय नहीं है :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & \text{यदि } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad , & \text{अन्यथा}\end{cases}$$

Show that the following function is continuous but not differentiable at origin :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & \text{if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \quad , & \text{otherwise}\end{cases}$$

(स) फलन :

$$f(x)=x^2,\ -\pi<x<\pi$$

तथा $f(x+2\pi)=f(x)$

की फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Find the Fourier series of function :

$$f(x)=x^2,\ -\pi<x<\pi$$

and $f(x+2\pi)=f(x)$.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) यदि :

$$f(x)=x^2,\ x\in[0,a],\ a>0$$

दर्शाइये कि :

$$f\in \mathrm{R}\ [0,a]$$

तथा $$\int_0^a x^2\,dx=\frac{a^3}{3}$$

If

$$f(x) = x^2,\ x \in [0, a],\ a > 0$$

show that :

$$f \in \mathrm{R}\ [0, a]$$

and $$\int_0^a x^2\, dx = \frac{a^3}{3}$$

(ब) निम्नलिखित समाकल के अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए :

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1 + x^2}\, dx$$

Test the convergence of the following :

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1 + x^2}\, dx$$

(स) यदि $f(x, t)$ सभी $x \geq a$ और $t \in [\alpha, \beta]$ के लिए संतत है तथा $\phi(x), [a, \xi]$ पर सभी $\xi > a$ के लिए परिबद्ध और समाकलनीय है, तब सिद्ध कीजिए :

$$\int_\alpha^\beta \int_a^\infty f(x, t)\phi(x)\, dx\ \ dx = \int_a^\infty f(x, t)\phi(x)\, dt\, dx$$

If $f(x, t)$ is continuous for all $x \geq a$ and $t \in [\alpha, \beta]$ and $\phi(x)$ is bounded and differentiable in $[a, \xi]$ for all $\xi > a$, then prove that :

$$\int_\alpha^\beta \int_a^\infty f(x, t)\phi(x)\, dx\ \ dx = \int_a^\infty f(x, t)\phi(x)\, dt\, dx$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) दर्शाइये कि $\arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right)$ आरगाँ समतल में z_2 को z_1 से और z_4 को z_3 से मिलाने वाली रेखाओं के बीच का कोण है।

Show that $\arg\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right)$ is angle between the lines joint the points z_2 to z_1 and z_4 to z_3 in argand plane.

(ब) सिद्ध कीजिए कि फलन

$$u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$$

लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करता है और संगत विश्लेषिक फलन $u + iv$ ज्ञात कीजिए।

Prove that the function :

$$u = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$$

satisfies Laplace's equation and find corresponding analytics function $u + iv$.

(स) रूपान्तरण $\mathrm{W} = \mathrm{T}_1(z) = \frac{z+1}{z+3}$, $\mathrm{W} = \mathrm{T}_g(z) = \frac{z}{z+2}$ लेकर निम्नलिखित का मान बताइए :

$$\mathrm{T}_1^{-1}(\mathrm{W}),\ \mathrm{T}_2^{-1}(\mathrm{W}),\ \mathrm{T}_2\,\mathrm{T}_1(z),\ \mathrm{T}_1\mathrm{T}_2(z),\ \mathrm{T}_2^{-1}\mathrm{T}_1(z)$$

Consider the transformation $W = T_1(z) = \dfrac{z+1}{z+3}$,

$W = T_g(z) = \dfrac{z}{z+2}$ find value of the following :

$T_1^{-1}(W)$, $T_2^{-1}(W)$, $T_2\,T_1(z)$, $T_1T_2(z)$, $T_2^{-1}T_1(z)$

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरिक समष्टि में परिमित संख्या में विवृत्त समुच्चयों का सर्वनिष्ठ विवृत्त होता है।

Prove that in a metric space, the intersection of a finite number of open sets is open.

(ब) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित प्रतिचित्रण $f : R^3 \to R^3$ (R^3, d) पर एक संकुचन प्रतिचित्रण है।

$$f(x) = \frac{1}{4}x \ \forall\, x \in R^3$$

Prove that the following mapping $f : R^3 \to R^3$, is a contraction in (R^3, d).

$$f(x) = \frac{1}{4}x \ \forall\, x \in R^3$$

(स) सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

Prove that $\sqrt{3}$ is an irrational number.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) लिण्डेलॉफ प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Lindelofs Theorem.

(ब) मान लो (X, d) तथा (Y, P) दो दूरिक समष्टियाँ हैं तथा $f : X \to Y$ एक संतत फलन है। यदि f एकैकी आच्छादक है और X संतत है तब सिद्ध कीजिए f^{-1} संतत है।

(स) मान लो $X = [-1, 1]$ निरपेक्ष मान दूरिक से सज्जित है, Y = R साधारण दूरिक समष्टि है और मान लो $f : X \to R$, $f(x) = x^2 + 7x \;\forall\; x \in X$ से परिभाषित है तब सिद्ध कीजिए कि f एक समान संतत है।

Let $X = [-1, 1]$ is equipped with absolute value metric, Y = R is usual metric space and Let $f : X \to R$ defined by $f(x) = x^2 + 7x \;\forall\; x \in X$ then prove that *f* is uniformly continuous.